63 有理型函数ノ derivative ニ就テ

吉田耕作（阪大）

I 先日有理型函数ノ defaut ニ関スル H. Cartan ノ欠陥ヲ非常ニ面白イ幾何学的考察ニヨツテ elegant ニ，角谷静夫君ガ訂正サレタ（19号）

偖角谷君ノ論文ニ於テ有理型函数 $y=f(x)$ ニ就テ其逆函数 $x=g(y)$ ノ Riemann 面 F_y ヲ $y=0$ ヲ中心トスル一定半径ノ円周デ切リトルトキ全テ単葉ナ円ガ切リトラレルナラバトイフ假定ガ入ツテヰル。此假定ヲ函数 $f(x)$ ノ満足ス可キ quantitative ナ必充條件トシテ求メテミルト

<u>條件</u> i) 0 ガ $f(x)$ ノ漸近値デナイコト

ii) $f(x)=0$ ノ根ヲ $x_1, x_2, \cdots$ トスルトキ $0<|x-x_i|<\dfrac{a}{|f'(x_i)|}$ $i=1,2,\cdots,$ ニ於テ $\infty>b>\left|\dfrac{f'(x)}{f'(x_i)}\right|>c>0$ ガ満足サレル如キ常数 a, b, c ノ存在スルコト。

証明。i) ノ必要ナコトハ Hurwitz-Iversen ノ定理カラ明カ ii) ノ必要ナコトモ Verzerrungssatz 及ビ単位円 $|y|<1$ デ正則且単葉ナ函数 $x=y+\cdots\cdots$ ニヨル $|y|<1$ ノ写像ハ $|x|<\frac{1}{4}$ ヲ含ムトイフ定理カラ得ラレル。又此等ノ條件ガ充分ナコトモ微分方程式 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f'(x)}$ ヲ初期條件（$y=0$ デ $x=x_i$）デトクト全テノ i ニツイテ此等ノ解ガ $|y|<d$ デ正則ニナル如キ $d>0$ ガ存在スルコトカワカル。

此事実ヲ用ヒテ次ノ定理ヲ証明シタイ

<u>定理</u>. $y=f(x)$ ガ ii) ヲ満足スルナラバ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ対シテ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|x_n|^{2+\varepsilon}|f'(x_n)|^2}$ ハ収斂スル。

注意1. 勿論 $x_1=0$ ガ $y=f(x)$ ノ0点ナラバ x_1 ヲ除ク。又 $\sum_{i=1}^{\infty}$ ハ満足スル0点ノミニツイテノ和トシテモヨロシイ。尚 $f(x)$ ノ a 点或∞点ニツイテモ同様ナ議論ガ出来ルコトハ云フ迄モナイ。

注意2 上定理ハ一般ニ $i\to\infty$ ノ時 $|f'(x_i)|$ ガ大キクナルトヲ示スモノデアツテ，之カラ例ヘバ $f(x)$ ノ0点ガ order ρ ノ Konvergenzklass ニ属スルナラバ

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \frac{|f'(x_i)|}{|x_i|^{\frac{\rho-2}{2}-\varepsilon}} \geq 1, \quad \varepsilon>0$$

ガ得ラレル。其ノ他 E. Ullrich ノ定理 (Crelle 166, Heft 4, 1932) ノ拡張モ得ラレル。即チ

系1 (E Ullrich) $|f'(x_i)|<K$ ナル K ガ存在スレバ

$$\sum \frac{1}{|x_i|^{2+\varepsilon}}$$ ハ 収斂スル

系2 (E Ullrich) $f(x)$ ノ零点ガ order $\rho>2$ ノ Konvergenzklass ニ属スルナラバ任意ノ $A>0$ ニ対シテ $|f'(x_i)|\leq A$ ヲ満足スル x_i ($|x_i|\leq r$) ノ個数ヲ $n_A(r,0)$ トスルトキ

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n_A(r,0)}{n(r,0)}=0$$

注意3 上定理ニ於ケル $|x_i|$, $|f'(x_i)|$ ノ exponent ガ一般ニハ之ヨリ良クデキナイコトハ $y=\wp(x)$, $y=e^{e^x}$ ヲ夫々考ヘテミルトワカル。(後者デハ 1-point)

偖定理ヲ証明スル為ニ上ノ条件カラ二ツノ系ヲ出シトク

系1 $y=f(x)$ ガ (ii) ヲ満足スルトスル 角谷君ノ定理ヲ使ヘバ $\delta(0)>0$ ナラバ 0 ハ $f(x)$ ノ漸近値デアル。

系2. $y=f(x)$ ガ (ii) ヲ満足スルナラバ $|y|<d$ ノ逆函数 $x=g_i(y)$ ($g_i(0)=x_i$), $i=1,2,\dots$, ニヨル写像ハ互ニ重ナラズ且夫々半径 $k/|f'(x_i)|$ (k ハ定常数) ヲ含ム，ヨツテ

(1) $\qquad \dfrac{1}{|f'(x_i)|} < h|x_i| \quad , \; i \geqq N$

ナル如キ h, N ガ存在スル。備

<u>定理ノ證明</u>　x 平面ヲ $\log x$, $-\pi < I\log x \leqq \pi$ ニヨッテ帯状領域ニ写シ之ノ spherical area ガ finite ナコトヲ用フ。即チコノトキ $|x - x_n| < \dfrac{k}{|f'(x_i)|}$, $n = 1, 2, \cdots\cdots$ ナル円ノ写像ノ全面積ハ finite。故ニ $y = y_1 + iy_2$ トスキ

$$\text{finite} = \sum_n \iint \frac{\left|\frac{g_n'(y)}{g_n(y)}\right|^2 dy_1 dy_2}{\left(1 + |\log g_n(y)|^2\right)^2}, \quad -\pi < I\log g_n(y) \leqq \pi$$

$$\geqq \sum_n \frac{\left(\dfrac{1}{|x_n| + \frac{k}{|f'(x_n)|}}\right)^2 \iint |g_n'(y)|^2 dy_1 dy_2}{\left(1 + \left[\left|\log\left(|x_n| + \frac{k}{|f'(x_n)|}\right)\right| + \pi\right]^2\right)^2}$$

$$= \sum_n \frac{\dfrac{|f'(x_n)|^2}{(|x_n f'(x_n)| + k)^2} \qquad \dfrac{k^2}{|f'(x_n)|^2}}{\left(1 + \left[\left|\log\left(|x_i| + \frac{k}{|f'(x_n)|}\right)\right| + \pi\right]^2\right)^2}$$

然ルニ (1) ニヨリ $\dfrac{1}{|f'(x_n)|} < h|x_n|$, $n \geqq N$ 及ビ $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty$ デアルカラ結局

$$\sum_n \frac{1}{|x_n|^2 |f'(x_n)|^2 \log M|x_n|} = \text{convergent}$$

ナル如キ $M > 0$ ガ存在スル。　　　　　（證了）

II. 上定理ノ如キ $f(x)$ ノ α-point ノ近傍ニ於ケル $f(x)$ ノ値ノ distribution ヲ取扱ッタモノハ E. Ullrich (前掲) ノ論文以外余リ見当ラヌ様ニ思フ。筆者ハ之ヲ進メルト清水先生

及ビ F. Marty ノ Fundamental domain ノ理論ニ量的ナ要素ヲ導入スル一ツノ practical ナ行キ方ヂヤナイカト思フ。

一寸目先キヲ変ヘルト次ノ如キコトモ云ヘル。一般ニ $f(x)$ ノ a-point ノ集合ヲ $E(a)$, $f'(x)$ ノ b-point ノ集合ヲ $E'(b)$ デ表セバ与ヘラレタ b ニ対シ $E(a_i) < E'(b)$ ナル如キ a_i ハ高々四ツシカナイ。$b=0$ ノ時ガ有名ナ A. Bloch ノ定理デアル, 証明ハ Nevanlinna ノ第二基本定理カラスグ出ル。即チ一般ニ $f(x)$ ノ a-point ニ於ケル $f'(x)$ ノ値ハ異ナルノデアル。値ヨガ異ナッテモ或定ッタ値ノ近傍ニアル様ナ a ノ値ハ一般ニハ三ツ以上ナイ。即チ一般ヲバ $f'(x)$ ノ値ハ $f(x)$ ノ a-points ノ近傍ニ於テ大キナ fluctuation ヲモツコトガ云ヘル。モツトハツキリ云ヘバ $f(x)$ ノ order > 2 ナラバ

$f(x)$ ノ a-point ヲ $x_1, x_2, \cdots\cdots$ トスルトキ $|x-x_i| < r$, $i=1,2$ …… ニ於テ (r ハ定常数) $\dfrac{|f'(x)|}{1+|f(x)|^2}$ ガ borné ナル如キ a ノ値ハ高々二ツシカナイ。証明ハモシ四ツアレバ全平面デ $\dfrac{|f'(x)|}{1+|f(x)|^2}$ ガ borné トナッテ矛盾ヲ得ルトイフコトヲ示スノデアル

(筆者 On a class of meromorphic function, 数物記事 7月, 1934, 参照)

(11. 27 受取)